

2 Diskrete Zufallsvariablen

zugehörige Seiten in Fahrmeir et al. (2007): Kap. 5.1 - 5.2

Aufgabe 16* (8 Punkte)

Wie kann man bei folgenden Zufallsexperimenten den Ergebnisraum Ω auffassen? Welche Zufallsvariablen werden dabei betrachtet und wie lautet der entsprechende Bildbereich Ω' ?

- (a) Ein Würfel wird dreimal geworfen. Man interessiert sich dabei für die Augensumme.
- (b) Bei einem Schießstand auf der Wiesen werden fünf Schüsse abgegeben. Der Standbesitzer weiß aus Erfahrung um die Trefferwahrscheinlichkeit eines Schützen. Ob ein Schütze einen Preis gewinnt, richtet sich nach der Anzahl der Treffer.
- (c) In einer Firma werden pro Tag n elektronische Bauteile produziert. Man interessiert sich hierbei für den Anteil defekter Bauteile.

Aufgabe 17

Aus einer Urne mit zehn Kugeln, die die Zahlen 0 bis 9 tragen, wird zweimal hintereinander mit Zurücklegen gezogen. Dabei werde explizit zwischen erster und zweiter Ziehung unterschieden.

- (a) Man bestimme die Verteilung der Summe der Zahlen aus den gezogenen Kugeln.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Summe größer als 13 ist?

Aufgabe 18

Gegeben ist eine diskrete Zufallsvariable X mit Träger $\mathcal{T} = \{-1, 1, 2\}$ und Wahrscheinlichkeitsfunktion

x	-1	1	2
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.7

- (a) Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X .
- (b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $Y = 4X + 2$ und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von Y .
- (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y und zwar direkt aus der Verteilung von Y sowie anhand der Ergebnisse über Erwartungswerte und Standardabweichungen von linear transformierten Zufallsvariablen.

Aufgabe 19

Sei X eine diskrete, um 0 symmetrische Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass dann $E(X) = 0$ gilt. Verallgemeinern Sie diese Aussage auf Zufallsvariablen, die um einen Punkt $c \in \mathbb{R}$ symmetrisch sind.

Aufgabe 20

Früher stellte sich für Ehepaare bisweilen das Problem, mindestens einen Sohn haben zu wollen. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Kind ein Junge ist.

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste, das zweite, das dritte, das vierte Kind der erste Sohn in einer Familie ist?
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ehepaar mindestens $k > 0$ Kinder zeugen muss, bis es den ersten Sohn erhält?
- (c) Wieviele Kinder muss ein Ehepaar durchschnittlich zeugen, bis es den ersten Sohn erhält?

Aufgabe 21* (8 Punkte)

Es seien X eine diskrete, auf den Zahlen $0, 1, \dots, n$ gleichmäßig verteilte Zufallsvariable und Y eine mit den Parametern n und $p \in (0, 1)$ binomialverteilte Zufallsvariable. Man zeige, dass

$$\text{Var}(X) \geq \text{Var}(Y).$$

Für welche Werte von n und p lässt sich diese Relation auf Gleichheit reduzieren?