

Aufgabe 23

Betrachten Sie die folgenden reellen Funktionen:

$$f_1(x) = 3x^2 + 1, \quad f_2(x) = e^{-2x} \quad \text{und} \quad f_3(x) = \log(x).$$

- (a) Sind die Abbildungen jeweils injektiv, surjektiv oder gar bijektiv?
- (b) Bestimmen Sie die inverse Abbildung von f_2 .
- (c) Wie lautet die verkettete Funktion $f_3 \circ f_1$?
- (d) Bestimmen Sie das vollständige Urbild von $V = [0, 1]$ unter f_3 .

Aufgabe 24

Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix der folgenden Funktion f . An welcher Stelle hat f ein lokales Minimum?

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1.5xy - 7.5x - 6.5y + 14.5.$$

Aufgabe 25

Sei f eine reellwertige Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 3 \cos(x) \exp(y) - y^3 + x.$$

- (a) Bestimmen Sie zunächst den Gradienten und anschließend das totale Differential an der Stelle $(\pi, 0)$.
- (b) Wie groß ist die abgeschätzte Veränderung von z , wenn x und y jeweils um $+0.01$ vom Punkt $(\pi, 0)$ abweichen?

Aufgabe 26

Entwickeln Sie die Funktion $\sin(x)$ als Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 27 (Aufgabe aus Klausur 2008)

Gegeben seien die folgenden beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & (x, y) &\mapsto g(x, y) = (x^2, y^2) \quad \text{und} \\ f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto f(u, v) = e^{u-v}. \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die zusammengesetzte Funktion $f \circ g$.
- (b) Bestimmen Sie den Gradienten von $f \circ g$.
- (c) Hat die Funktion $f \circ g$ ein relatives Minimum oder ein relatives Maximum oder weder das Eine noch das Andere?

Aufgabe 28 (Zusatzaufgabe aus der Klausur 2009)

Gegeben Seien die beiden (total) differenzierbaren Funktionen und der konstante Vektor $\vec{\mu}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \langle \vec{x} - \vec{\mu}, \vec{x} - \vec{\mu} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto e^u \end{aligned}$$

1. Geben Sie die Funktion $g \circ f$ an.
2. Geben Sie das Totale Differential der Funktion $g \circ f$ an.
3. Für welchen Vektor hat das Totale Differential den Wert 0?