

Aufgabe 1 (15 min)

Gegeben sind die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} , sowie der Vektor \mathbf{y} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeichnen Sie den Vektor \mathbf{y} in ein cartesisches Koordinatensystem ein.
- (b) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{B}\mathbf{y}$ und zeichnen Sie den Ergebnisvektor \mathbf{b} ebenfalls in das Koordinatensystem. Wie lässt sich die mit \mathbf{B} durchgeführte Operation geometrisch interpretieren?
- (c) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (d) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Warum ist das Ergebnis verschieden von \mathbf{b} ?

Aufgabe 2 (15 min)

Geben Sie jeweils die Definition und ein Beispiel für die folgenden Matrizen an:

- (a) quadratische Matrix,
- (b) symmetrische Matrix,
- (c) Diagonalmatrix,
- (d) obere Dreiecksmatrix,
- (e) Blockmatrix,
- (f) Orthogonalmatrix,
- (g) idempotente Matrix.

Aufgabe 3 (30 min)

Sehen Sie sich zur Vorbereitung dieser Aufgabe die Beweise auf den Seiten 40 - 43 des Matrixalgebra-Skriptes genauer an.

- (a) Prüfen Sie, ob die Gerade $g(x) = 5x + 1$ ein Unterraum des Vektorraums \mathbb{R}^2 ist.
- (b) Ist die Gerade $h(x) = 5x$ ein Unterraum des \mathbb{R}^2 ?
- (c) Ist der Durchschnitt zweier Unterräume U_1 und U_2 ein Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (15 min)

Gegeben seien die folgenden Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass \mathbf{x} und \mathbf{y} linear unabhängig sind.
- (b) Bestimmen Sie den Vektor \mathbf{z} , der (gleichzeitig) zu beiden Vektoren orthogonal ist. (Hinweis: Bestimmen Sie den Vektor \mathbf{z} mit Länge 1.)
- (c) Stellen die drei Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 dar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (30 min)

Es sei eine Ebene im \mathbb{R}^3 gegeben durch:

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie die Ebene als Unterraum U des \mathbb{R}^3 an.
- (b) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum ist.
- (c) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement U^\perp zu U . (Siehe dazu Seite 67 des Skripts.)
- (d) Zeigen Sie, dass U^\perp ein Untervektorraum ist.
- (e) Was ist U^\perp geometrisch?

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)

Bringen Sie folgende 5×5 - Matrix in die Dreiecksform. Nutzen Sie dafür den im Matrixalgebra-Skript beschriebenen Algorithmus 1.1. (Siehe Seiten 21 ff., insbesondere auch Beispiel 1.17.)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$