

### Aufgabe 1

Bringen Sie die gegebene Matrix  $\mathbf{X}$  in Dreiecksgestalt und bestimmen Sie den Rang. Ist  $\mathbf{X}$  regulär?

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -4 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -4 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 6 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche reellen Zahlen  $a$  gilt jeweils

- $rg(\mathbf{A}) = 1$
- $rg(\mathbf{A}) = 2$
- $rg(\mathbf{A}) = 3$  ?

(ii) Ist die Matrix  $\mathbf{A}$  für  $a = 12$  invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

### Aufgabe 3

Betrachten Sie weiterhin die Matrix  $\mathbf{A}$  für  $a = 3$ , die Diagonalmatrix  $\mathbf{D} = \text{diag}(8, 1, 0.5)$ , sowie die Matrix  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Bestimmen Sie die Determinanten von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{D}$ .
- (ii) Wie sieht die Determinante der Matrix  $\mathbf{B}$  aus?
- (iii) Bestimmen Sie die Spur der Summenmatrix der beiden Matrizen, d.h.  $sp(\mathbf{A} + \mathbf{D})$ .
- (iv) Wie lautet die Determinante der Matrix  $\mathbf{X}$  aus Aufgabe 1?

#### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

#### Aufgabe 5

Sei  $\mathbf{A}$  eine beliebige, quadratische Matrix, mit  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

#### Aufgabe 6

Sei  $\mathbf{X}$  eine Matrix mit beobachteten Kovariablen-Werten und  $\mathbf{y}$  ein Vektor mit beobachtetem Response.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den KQ-Schätzer für ein lineares Regressionsmodell, d.h.  $\hat{\beta}_{KQ} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$ .