

Aufgabe 13 (20 min)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} , sowie die zugehörigen Eigenvektoren.
- (b) Wie lauten die Eigenwerte der Matrix \mathbf{D} ? Welches sind die zugehörigen Eigenvektoren?
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von \mathbf{A}^{-1} .

Aufgabe 14 (20 min)

Zeigen Sie, dass jede symmetrische $n \times n$ - Matrix \mathbf{B} mit $rg(\mathbf{B}) = r$ als folgendes Produkt dargestellt werden kann:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mathbf{P}^T.$$

Dabei ist \mathbf{P} eine $n \times r$ - Matrix und besteht aus paarweise orthonormalen Eigenvektoren von \mathbf{B} .

Hinweis: Schauen Sie sich den Beweis zu Satz 6.6 über die *Spektralzerlegung* auf S. 117 im Skript an.

Aufgabe 15 (30 min)

Gegeben sei die folgende symmetrische Matrix \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwertzerlegung (auch *Spektralzerlegung* genannt) von \mathbf{B} .
- (b) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus (a) die (symmetrische) Wurzel $\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}$ der Matrix \mathbf{B} , wobei gilt $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \mathbf{B}^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 16 (20 min)

- (a) Was ist eine quadratische Form?
- (b) Bestimmen Sie, ob die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} aus Aufgabe 13 jeweils positiv oder negativ definit oder indefinit sind.

Aufgabe 17 (Zusatzaufgabe aus der Klausur 2009)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Ist \mathbf{A} regulär?
- (b) Bestimmen Sie den auf Länge 1 normierten Eigenvektor, der zu dem ganzzahligen Eigenwert gehört.
- (c) Wie lauten die Eigenwerte der zu \mathbf{A} inversen Matrix?
- (d) Bestimmen Sie ebenfalls die Determinante der Inverse $\det(\mathbf{A}^{-1})$.