

### Aufgabe 13

Betrachten Sie die folgenden Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ , sowie die zugehörigen Eigenvektoren.
- (b) Wie lauten die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{D}$ ? Welches sind die zugehörigen Eigenvektoren?
- (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $\mathbf{A}^{-1}$ .

### Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass jede symmetrische  $n \times n$  - Matrix  $\mathbf{B}$  mit  $rg(\mathbf{B}) = r$  als folgendes Produkt dargestellt werden kann:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mathbf{P}^T.$$

Dabei ist  $\mathbf{P}$  eine  $n \times r$  - Matrix und besteht aus paarweise orthonormalen Eigenvektoren von  $\mathbf{B}$ .  
Hinweis: Beweis zu Satz 6.6 über die *Spektralzerlegung* auf S. 117 im Skript.

### Aufgabe 15

Gegeben sei die folgende symmetrische Matrix  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwertzerlegung (auch *Spektralzerlegung* genannt) von  $\mathbf{B}$ .
- (b) Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus (a) die Inverse  $\mathbf{B}^{-1}$ .

### Aufgabe 16

- (a) Was ist eine quadratische Form?
- (b) Bestimmen Sie, ob die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{D}$  aus Aufgabe 13 jeweils positiv oder negativ definit oder indefinit sind.

**Aufgabe 17** (Zusatzaufgabe aus der Klausur 2009)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ . Ist  $\mathbf{A}$  regulär?
- (b) Bestimmen Sie den auf Länge 1 normierten Eigenvektor, der zu dem ganzzahligen Eigenwert gehört.
- (c) Wie lauten die Eigenwerte der zu  $\mathbf{A}$  inversen Matrix?
- (d) Bestimmen Sie ebenfalls die Determinante der Inverse  $\det(\mathbf{A}^{-1})$ .