

Aufgabe 7 (30 min)

Bringen Sie die gegebene Matrix \mathbf{X} in die Dreiecksform und bestimmen Sie deren Rang.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Ist \mathbf{X} regulär?
- (b) Welche Dimension hat der Nullraum der Matrix \mathbf{X} ?

Aufgabe 8 (10 min)

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & a & 5 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Für welche ganzen Zahlen a gilt jeweils
- $rg(\mathbf{A}) = 1$
 - $rg(\mathbf{A}) = 2$
 - $rg(\mathbf{A}) = 3$?
- (b) Ist die Matrix \mathbf{A} für $a = 10$ invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9 (20 min)

Betrachten Sie erneut die Matrix \mathbf{A} aus Aufgabe 8, für $a = 3$, sowie die Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \text{diag}(0.5, 0.2, 0.3)$ und die folgende Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, sofern möglich, die Determinanten der drei Matrizen.
- (b) Wie lautet die Inverse der Matrix \mathbf{D} ?
- (c) Bestimmen Sie die Spur der Produktmatrix der beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} , d.h. $\text{sp}(\mathbf{A}\mathbf{D})$.
- (d) Ist die Spur der Summenmatrix aus \mathbf{A} und \mathbf{D} größer oder kleiner als die Spur der Produktmatrix aus c)?

Aufgabe 10 (15 min)

Sei \mathbf{A} eine beliebige, quadratische Matrix, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang gilt:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Aufgabe 11 (30 min oder Zusatzaufgabe)

Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix mit dem Adjunktenverfahren (Siehe dazu u.a. Zusatzblatt 2a):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12 (Zusatzaufgabe)

Nehmen Sie an, Sie haben in einer Studie 3 Personen befragt. Sei \mathbf{X} die Matrix mit den beobachteten Kovariablen-Werten und \mathbf{y} der Vektor mit den beobachteten Werten der interessierenden Response-Variable.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den KQ-Schätzer für ein lineares Regressionsmodell, d.h. $\hat{\beta}_{KQ} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$.