

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{D} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} , sowie die zugehörigen Eigenvektoren.
- (ii) Wie lauten die Eigenwerte der Matrix \mathbf{D} ?
- (iii) Gilt allgemein, dass die Eigenwerte einer Diagonalmatrix den Elementen der Hauptdiagonalen entsprechen? Belegen Sie Ihre Antwort (Siehe dazu S. 111 ff. im Skript).
- (iv) Bestimmen Sie die Eigenwerte von \mathbf{A}^{-1} .

Aufgabe 2

Gegeben ist eine Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} . Ist \mathbf{A} regulär?
- (ii) Wie lautet die Determinante $\det(\mathbf{A})$?
- (iii) Bestimmen Sie den normierten Eigenvektor, der zum ganzzahligen Eigenwert gehört.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass jede symmetrische $n \times n$ - Matrix \mathbf{B} mit $rg(\mathbf{B}) = r$ als folgendes Produkt dargestellt werden kann:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \, diag(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \, \mathbf{P}^T.$$

Dabei ist \mathbf{P} eine $n \times r$ - Matrix und besteht aus paarweise orthonormalen Eigenvektoren von \mathbf{B} . Hinweis: Beweis zu Satz 6.6 über die *Spektralzerlegung* auf S. 117 im Skript.

Aufgabe 4

- (i) Was ist eine quadratische Form?
- (ii) Ist die Matrix **A** aus Aufgabe 2 positiv oder negativ definit oder indefinit?

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die *Choleskyzerlegung* (siehe S. 128/129 des Skripts) für die folgende symmetrische 3×3 - Matrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$