

1 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix $rg(\mathbf{A})$ kann definiert werden als die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren von \mathbf{A} . D.h. wenn man einen (oder mehr) der Spaltenvektoren als Linearkombination der anderen darstellen kann, so sind die Vektoren nicht linear unabhängig und die Matrix hat keinen vollen Rang. Zum Beispiel hat die folgende 3×3 - Matrix nur den Rang 2, da der dritte Spaltenvektor als Linearkombination der ersten beiden darstellbar ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad rg(\mathbf{A}) = 2, \quad \text{weil} \quad 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kann den Rang einer Matrix auch über die Zeilen definieren, allerdings gilt immer:

$$\text{Spaltenrang}(\mathbf{A}) = \text{Zeilenrang}(\mathbf{A}).$$

Eine **quadratische** Matrix mit vollem Rang $rg(\mathbf{A}) = n$ heißt *regulär*. Ist der Rang der quadratischen Matrix $rg(\mathbf{A}) < n$ spricht man von einer *singulären* Matrix.

2 Determinante

Eine Matrix hat nur dann eine von null verschiedene Determinante, wenn sie regulär ist, also quadratisch ist und vollen Rang $rg(\mathbf{A}) = n$ hat. Determinantenberechnung für eine 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = a d - c b$$

Für 3×3 - Matrizen kann man Determinanten sehr bequem mit der Regel von Sarrus berechnen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A}) = a e i + b f g + c d h - g e c - h f a - i d b.$$

Für reguläre Matrizen höherer Ordnung kann die Determinante mit anderen Berechnungsverfahren bestimmt werden, z.B. mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Demnach gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall i \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \forall j \quad \text{mit} \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij}),$$

wobei A_{ij} der sogenannte Kofaktor zum Element $a_{ij} \in \mathbf{A}$ ist. \mathbf{A}_{ij} ist die $(n-1) \times (n-1)$ - Matrix, die entsteht, wenn man aus der $n \times n$ - Matrix \mathbf{A} die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht, und $\det(\mathbf{A}_{ij})$ heißt Minor zum Element $a_{ij} \in \mathbf{A}$.

3 Inverse

Die Inverse \mathbf{A}^{-1} zu einer Matrix \mathbf{A} ist die Matrix, mit der man \mathbf{A} multiplizieren muss, um die Einheitsmatrix zu erhalten, also z.B. bei einer 3×3 - Matrix

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Inversenbestimmung u.a. die Determinante im Nenner benötigt, können nur quadratische Matrizen mit vollem Rang invertiert werden. Für diese Matrizen ist $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Inversenbestimmung für eine 2×2 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversenbestimmung für eine 3×3 Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} (ei - fh) & (ch - bi) & (bf - ce) \\ (fg - di) & (ai - cg) & (cd - af) \\ (dh - eg) & (bg - ah) & (ae - bd) \end{pmatrix}$$

Für Matrizen höherer Ordnungen müssen andere Berechnungsverfahren herangezogen werden, z.B. Inversenbestimmung mit Hilfe der Adjunkte $\text{adj}(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A}), \quad \text{wobei} \quad \text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

wobei A_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n\}$ die sogenannten Kofaktoren zu den Elementen der Matrix \mathbf{A} sind.